





Propriété 3 – Conjugué d'un imaginaire pur

$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow -z = \overline{z}$$

 \Rightarrow

Si $z \in i\mathbb{R}$ alors il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que z = 0 + ib. On a donc $\overline{z} = 0 - ib = -ib = -z$.

_

Si $\overline{z} = -z$ alors $\operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z) = -\operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z)$. On a donc $2\operatorname{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}[z) = 0$ donc $z \in i\mathbb{R}$.

2. Opérations dans C

On note z = a + ib et z' = a' + ib' où a, a', b, b' sont des réels.

Propriété 4 - Somme de deux complexes

$$z + z' = (a + a') + i(b + b')$$

donc

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z+z') = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z+z') = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(z') \end{cases}$$

Démonstration

$$z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = a + ib + a' + ib' = (a + a') + i(b + b')$$

Exemples:

 $\Rightarrow z = 3 + 4i$ et z' = -5 + 3i alors z + z' = -2 + 7i.

> z = 3 + 4i et z' = -2i alors z + z' = 3 + 2i.

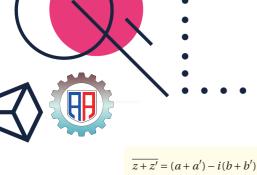
Propriété 5 – Conjugué d'une somme

$$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$

Le conjugué d'une somme est la somme des conjugués.

Démonstration

On note z=a+ib et z'=a'+ib' où a,a',b,b' sont des réels. z+z'=(a+a')+i(b+b')



$$\overline{z+z'} = (a+a') - i(b+b') = a+a'-ib-ib' = (a-ib) + (a'-ib') = \overline{z} + \overline{z'}$$

Propriété 6 – Différence de deux complexes

$$z - z' = (a - a') + i(b - b')$$

ou

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z - z') = \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z - z') = \operatorname{Im}(z) - \operatorname{Im}(z') \end{cases}$$

Démonstration

$$z-z'=(a+ib)-(a'+ib')=a+ib-a'-ib'=(a-a')+i(b-b')$$

Exemples:

 $\Rightarrow z = 3 + 4i \text{ et } z' = -5 + 3i \text{ alors } z - z' = 8 + i$ $\Rightarrow z = 3 + 4i \text{ et } z' = -2i \text{ alors } z - z' = 3 + 6i$

Propriété 7 – Conjugué d'une différence

$$\overline{z-z'} = \overline{z} - \overline{z'}$$

Le conjugué d'une différence est la différence des conjugués.

Démonstration

On note z = a + ib et z' = a' + ib' où a, a', b, b' sont des réels. z - z' = (a - a') + i(b - b')

$$\overline{z-z'} = (a-a') - i(b-b') = a-a'-ib+ib' = (a-ib) - (a'-ib') = \overline{z} - \overline{z'}$$

Propriété 8 - Produit de deux complexes

$$z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

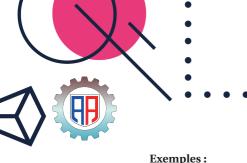
ou

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z \times z') = \operatorname{Re}(z) \times \operatorname{Re}(z') - \operatorname{Im}(z) \times \operatorname{Im}(z') \\ \operatorname{Im}(z \times z') = \operatorname{Re}(z) \operatorname{Im}(z') + \operatorname{Im}(z) \operatorname{Re}(z') \end{cases}$$

Démonstration

$$z \times z' = (a+ib) \times (a'+ib') = aa'+iab'+iba'+i^2bb' = aa'+iab'+iba'-bb'$$

= $(aa'-bb')+i(ab'+ba')$





$$\Rightarrow z = 3 + 4i \text{ et } z' = -5 + 3i \text{ alors } z \times z' = -15 + 9i - 20i - 12 = -27 - 11i$$

 $\Rightarrow z = 3 + 4i \text{ et } z' = 3 - 4i \text{ alors } z \times z' = 3^2 - (4i)^2 = 9 - (-16) = 9 + 16 = 25$

Propriété 9 - Produit par son conjugué

$$z \times \overline{z} = a^2 + b^2$$

ou

$$z \times \overline{z} = \text{Re}^2(z) + \text{Im}^2(z)$$

Démonstration

$$z \times \overline{z} = (a+ib) \times (a-ib) = aa + -iab + iba - i^2bb = aa - (-bb) = a^2 + b^2$$

Exemples:

$$\Rightarrow z = 3 + 4i \text{ alors } z \times \overline{z} = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

 $\Rightarrow z = 1 + i \text{ alors } z \times \overline{z} = 1^2 + 1^2 = 2$

Propriété 10 – Conjugué d'un produit

$$\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$$

Le conjugué d'un produit est le produit des conjugués.

Démonstration

On note z = a + ib et z' = a' + ib' où a, a', b, b' sont des réels. $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$

$$\overline{z \times z'} = (aa' - bb') - i(ab' + ba')$$

$$\overline{z} \times \overline{z'} = (a - ib)(a' - ib') = aa' - iab' - iba' - bb' = (aa' - bb') - i(ab' + ba')$$
 donc
$$\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$$

Propriété 11 - Inverse d'un nombre complexe

Si $z \in \mathbb{C}^*$,

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \left(\frac{a}{z\overline{z}}\right) - i\left(\frac{b}{z\overline{z}}\right)$$

ou

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{z\overline{z}}\right) - i\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{z\overline{z}}\right)$$











Démonstration

Si
$$z \in \mathbb{C}^*$$
,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{1 \times (a-ib)}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{z\overline{z}} - i \times \frac{b}{z\overline{z}}$$

Exemples:

$$\Rightarrow z = 3 + 4i \text{ alors } \frac{1}{z} = \frac{3}{25} - i \times \frac{4}{25} = \frac{1}{25}(3 - 4i)$$

$$> z = 1 - i \text{ alors } \frac{1}{z} = \frac{1}{2} + i \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 + i)$$

Propriété 12 – Conjugué d'un inverse

Si $z \neq 0$,

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

Le conjugué d'un inverse est l'inverse du conjugué.

Démonstration

On note z = a + ib avec $z \neq 0$.

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{a+ib}{a^2+b^2}$$

$$\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{a - ib} = \frac{a + ib}{(a - ib)(a + ib)} = \frac{a + ib}{a^2 + b^2}$$

Propriété 13 - Conjugué d'une puissance entière

Soit $n \in \mathbb{Z}$, alors

$$\overline{(z^n)} = \overline{z}^n$$

Le conjugué d'une puissance entière est la puissance entière du conjugué.

Démonstration

 \triangleright On note $n \in \mathbb{N}$ et z = a + ib où a et b sont des réels.

On va démontrer cette propriété par récurrence :

On note \mathbf{P}_n la propriété : $\overline{(z^n)} = \overline{z}^n$.

Initialisation: (Pour n = 0)

$$\overline{(z^0)} = \overline{1} = 1$$
 et $\overline{z}^0 = 1$

donc P_0 est vraie.

Hérédité : on suppose que P_k est vraie pour un rang k, montrons que dans ce

cas P_{k+1} l'est aussi.